スタディサプリ　国公立大 数学ⅠAⅡBについて

　この講座は，国公立大学における個別試験を受験する生徒を対象に，実際に出題された入試問題を題材に，これまでの学習で培ってきた力をもとに，どのように問題を解きほぐし，アウトプットすべきかを伝授する講座です。

　この講座を受けていただく時点でのあなたの実力が，国公立大学があなたに期待している解法に対して，どこまで到達し，上回り，また下回っているかについて，予習と講義動画を通じて分野別に整理することで，あなたの今後の学習の指針となるでしょう。

山内　恵介

― 目次 ―

第１講　場合の数と確率 …… 2

第２講　微分・積分 …… 5

第３講　ベクトル …… 8

第４講　数列 …… 11

※授業当日までに，該当する講の「予習」を，ノート等に必ず行ってから授業に臨んで下さい。
当日の授業は，予習を行っていることを前提に行われます。

第１講　場合の数と確率

1　大中小３個のさいころを同時に投げて，出る目をそれぞれ a，b，c とする．この a，b，c に対し，$f(x)=ax^2+bx+c$ とおくとき，次の問いに答えよ．

(1)　方程式 $f(x)=0$ が，１つの実数解(重解)をもつ確率を求めよ．

(2)　方程式 $f(x)=0$ が，異なる２つの実数解をもつ確率を求めよ．

(3)　方程式 $f(x)=0$ が，実数解をもたない確率を求めよ．

(4)　方程式 $f(x)=0$ が，異なる２つの実数解 α，β をもち，かつ $\alpha^2+\beta^2$ が整数となる確率を求めよ．

2　0から9までの整数が1つずつ書かれた10枚のカードがある．次の問いに答えよ．

(1)　書かれた整数の和が3の倍数になる3枚のカードの組合せの総数を求めよ．

(2)　10枚から4枚を同時に選ぶとき，それら4枚に書かれた整数の和が偶数になる確率を求めよ．

(3)　はじめ10枚あるカードの中から，1回に1枚ずつ選び，0が書かれたカードを選ぶまで繰り返す．選んだすべてのカードに書かれた整数の和が10以上になる確率を求めよ．

ただし，1回選んだカードは次回以降の選択肢から除くものとする．

3　m，n を整数とする．xy 平面上の 4 点 $(m,\ n)$，$(m-1,\ n)$，$(m-1,\ n-1)$，$(m,\ n-1)$ を頂点にもつ正方形を $R_{(m,\ n)}$ と表す．初めに 1 辺の長さが 1 のさいころが $R_{(1,\ 1)}$ に 1 の目を上に置かれている．1 枚の硬貨を投げて表が出たらさいころを x 軸方向に $+1$ だけ転がして移し，裏が出たら y 軸方向に $+1$ だけ転がして移す．以下の問いに答えよ．

ただし，さいころの向かい合う面の数の目の和は 7 であるとする．

(1)　硬貨を 5 回投げたあとにさいころが $R_{(3,\ 4)}$ の位置にある確率を求めよ．

(2)　硬貨を 2 回投げたあとにさいころの 6 の目が上にあるという条件の下で，硬貨を 5 回投げたあとにさいころが $R_{(3,\ 4)}$ の位置にある条件付き確率を求めよ．

(3)　硬貨を 5 回投げたあとにさいころの 1 の目が上にある確率を求めよ．

第２講　微分・積分

1　原点 O(0, 0) を中心とする半径 1 の円を C_1，点 B(−1, 0) を中心とする半径 1 の円を C_2 とする．点 P は点 A(1, 0) を出発して，一定の速さで反時計回りに円 C_1 上を半周して点 B で停止する．一方，点 Q は点 D(−2, 0) を点 P と同時に出発して，点 P の速さの 2 倍の速さで時計回りに円 C_2 上を 1 周して停止する．

(1)　$\angle \mathrm{AOP}=\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とするとき，点 P と点 Q の座標をそれぞれ θ を用いて表せ．

(2)　$t=\cos\theta$ とする．PQ^2 を t を用いて表せ．

(3)　PQ^2 を最小にする t の値と，PQ^2 の最小値を求めよ．

2　xy 平面上に，放物線 $C_1：y=x^2$ と点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ $(q>p^2)$ があり，P を通り傾きが t の直線を l とする．さらに，C_1 と l との 2 つの交点を結ぶ線分の中点において，放物線 $C_2：y=-x^2+ax+b$ が l と接している．次の問いに答えよ．

⑴　$a,\ b$ を求めよ．

⑵　C_1 と C_2 で囲まれる領域の面積を求めよ．

⑶　t が実数全体を動くとき，⑵で求めた面積の最小値を求めよ．

3　p を実数とする．関数 $y=x^3+px^2+x$ のグラフ C_1 と関数 $y=x^2$ のグラフ C_2 は，$x>0$ の範囲に共有点を2個もつとする．

(1)　このような p の値の範囲を求めよ．

(2)　C_1 と C_2 の $x>0$ の範囲にある共有点の x 座標をそれぞれ α，β $(\alpha<\beta)$ とし，$0\leqq x\leqq\alpha$ と $\alpha\leqq x\leqq\beta$ の範囲で C_1 と C_2 が囲む部分の面積をそれぞれ S_1，S_2 とする．$S_1=S_2$ となるような p の値を求めよ．また，このときの S_1 の値を求めよ．

第３講　ベクトル

1　平面上に△OABと点Cがある．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$とおくとき，内積に関する等式$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}$が成り立つとする．次の問いに答えよ．

(1)　$OB\perp CA$，$OC\perp AB$が成り立つことを示せ．ただし，点Cは3点O，A，Bと異なるものとする．

(2)　点Dを$\overrightarrow{OD}=\dfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})$が成り立つ点とする．このとき，点Dは三角形OABの外心であることを示せ．

(3)　$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$\cos\angle AOB=\dfrac{1}{3}$とする．

(i)　$\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$が成り立つような$x$，$y$の値を求めよ．

(ii)　tを$0<t<1$を満たす実数とし，辺ABを$t:(1-t)$に内分する点をEとする．3点O，C，Eが一直線上にあるとき，tの値を求めよ．

2　座標空間内の３点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(3,\ 0,\ 4)$，$\mathrm{B}(1,\ -2,\ 2)$ を通る平面を α とする．α 上にない２点 C，D は次を満たす．

(i)　点 C，D は平面 α に関して同じ側にある．

(ii)　点 C から α に垂線 CE を下ろすと，半直線 OE は角 AOB の二等分線であり，辺 AB と点 G で交わる．点 G は OE を $3:1$ に内分する．

(iii)　点 D から α に垂線 DF を下ろすと，半直線 AF は辺 OB と点 H で交わる．点 H は辺 OB を $1:2$ に内分する．

(iv)　$\mathrm{CE}=2\mathrm{DF}$

定数 k を $\overrightarrow{\mathrm{AF}}=k\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ となるようにとる．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおくとき，次の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表し，点 G の座標を求めよ．

(2)　平面 α に垂直なベクトルで，長さが $\sqrt{26}$ となるものを１つ求めよ．

(3)　点 C から平面 α 上の点を通り点 D へ行く最短経路がある．このときに通る平面 α 上の点を P とする．$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ および k を用いて表せ．

(4)　(3)において，点 P が $\triangle\mathrm{OAB}$ の内部にあるための k の値の範囲を求めよ．

3　O を原点とする座標空間に 3 点 A(1, -1, 2), B(2, 1, -1), C(-1, 2, 1) がある．点 P は $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ (s, t は実数) を満たすものとする．次の問いに答えよ．

(1)　3 点 A, B, C は同一直線上にないことを示せ．

(2)　3 点 A, B, C が定める平面を α とする．$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ が平面 α と垂直になるときの点 P を P_1 とする．このとき，点 P_1 の座標を求めよ．

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の大きさが最小になるときの点 P を P_2 とする．このとき，点 P_2 の座標を求めよ．

(4)　上の(2)で定めた平面 α と，(3)で定めた点 P_2 を考える．直線 OP_2 と平面 α の交点 Q の座標を求めよ．

第４講　数列

1　自然数 n に対して，3^n を 5 で割ったときの商を a_n，余りを b_n とおく．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{100} b_n$ の値を求めよ．

(2) a_n を b_n を用いて表せ．

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{100} a_n$ を 3 で割ったときの余りを求めよ．

2 初項 a，公差 -3 の等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする．また，T_n を次の式で定める．

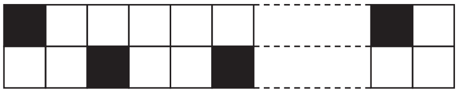
$$T_n=\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)a_k=na_1+(n-1)a_2+(n-2)a_3+\cdots\cdots+2a_{n-1}+a_n$$

このとき，次の問いに答えよ．

(1) 数学的帰納法を用いて，$S_n=\dfrac{1}{2}n\{2a-3(n-1)\}$ となることを証明せよ．

(2) T_n を a，n を用いて表せ．

(3) a を自然数とする．$S_n<0$ かつ $T_n \geqq 0$ を満たす自然数 n の個数が 30 であるような a の値をすべて求めよ．



3　n を自然数とする．白色または黒色の辺の長さが 1 の正方形のタイル $2n$ 枚を用いて，右図のように縦の長さ 2，横の長さ n の長方形に敷きつめる．

このとき，次の条件を満たすように敷きつめるものとする．

（条件）　どの 2 つの黒色のタイルも頂点を共有しない．

左上（上段の左端）と左下（下段の左端）のタイルがともに白色になるときの場合の数を a_n，左上が黒色で左下が白色となるときの場合の数を b_n，すべての場合の数を c_n とする．

次の問いに答えよ．

(1)　a_1，b_1，c_1，a_2，b_2，c_2 を求めよ．

(2)　a_{n+1}，b_{n+1} を a_n，b_n を用いて表せ．

(3)　$a_{n+1}+a_n$ を求めよ．また，$a_{n+1}-2a_n$ を求めよ．

(4)　c_n を求めよ．

テキスト解答

【講義問題の解答・解説】

第１講　場合の数と確率

1　2次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると，$D=b^2-4ac$

(1)　$f(x)=0$ が重解をもつのは $D=0$，つまり $b^2-4ac=0$ のとき．

$b^2=4ac$ であり，右辺は偶数より，左辺も偶数．b^2 が偶数より，b は偶数に限られる．

$b=2$ のとき $ac=1$ より $(a,\ c)=(1,\ 1)$ の1通り

$b=4$ のとき $ac=4$ より $(a,\ c)=(1,\ 4)$，$(2,\ 2)$，$(4,\ 1)$ の3通り

$b=6$ のとき $ac=9$ より $(a,\ c)=(3,\ 3)$ の1通り

よって，求める確率は $\dfrac{1+3+1}{6^3}=\dfrac{5}{216}$

(2)　$f(x)=0$ が異なる2つの実数解をもつのは $D>0$，つまり $b^2-4ac>0$ のとき．

$b^2>4ac\geqq 4$ より，b は3以上である．

$b=3$ のとき $4ac<9$ より $ac<\dfrac{9}{4}$　よって $(a,\ c)=(1,\ 1)$，$(1,\ 2)$，$(2,\ 1)$ の3通り

$b=4$ のとき $4ac<16$　より $ac<4$

よって $(a,\ c)=(1,\ 1)$，$(1,\ 2)$，$(1,\ 3)$，$(2,\ 1)$，$(3,\ 1)$ の5通り

$b=5$ のとき $4ac<25$　より $ac<\dfrac{25}{4}$

よって $(a,\ c)=(1,\ 1)$，$(1,\ 2)$，$(1,\ 3)$，$(1,\ 4)$，$(1,\ 5)$，$(1,\ 6)$，$(2,\ 1)$，
$(2,\ 2)$，$(2,\ 3)$，$(3,\ 1)$，$(3,\ 2)$，$(4,\ 1)$，$(5,\ 1)$，$(6,\ 1)$ の14通り

$b=6$ のとき $4ac<36$　より $ac<9$

よって $(a,\ c)=(1,\ 1)$，$(1,\ 2)$，$(1,\ 3)$，$(1,\ 4)$，$(1,\ 5)$，$(1,\ 6)$，$(2,\ 1)$，$(2,\ 2)$，
$(2,\ 3)$，$(2,\ 4)$，$(3,\ 1)$，$(3,\ 2)$，$(4,\ 1)$，$(4,\ 2)$，$(5,\ 1)$，$(6,\ 1)$
の16通り

よって，求める確率は $\dfrac{3+5+14+16}{6^3}=\dfrac{38}{6^3}=\dfrac{19}{108}$

(3)　$f(x)=0$ が実数解をもたない事象は，(1)，(2)の余事象である．

よって，求める確率は $1-\left(\dfrac{5}{216}+\dfrac{19}{108}\right)=\dfrac{173}{216}$

(4)　解と係数の関係より $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$，$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

よって，$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\left(-\dfrac{b}{a}\right)^2-2\cdot\dfrac{c}{a}=\dfrac{b^2}{a^2}-\dfrac{2c}{a}=\dfrac{b^2-2ac}{a^2}$

これが整数となる a，b，c のうち，(2)を満たすものを考える．

$a=1$ のとき $\alpha^2+\beta^2=b^2-2c$ より，(2)のうち $a=1$ である

$(b,\ c)=(3,\ 1)$，$(3,\ 2)$，$(4,\ 1)$，$(4,\ 2)$，$(4,\ 3)$，$(5,\ 1)$，$(5,\ 2)$，$(5,\ 3)$，$(5,\ 4)$，
$(5,\ 5)$，$(5,\ 6)$，$(6,\ 1)$，$(6,\ 2)$，$(6,\ 3)$，$(6,\ 4)$，$(6,\ 5)$，$(6,\ 6)$

の 17 通りすべてが条件を満たす.

$a=2$ のとき $\alpha^2+\beta^2=\dfrac{b^2-4c}{4}$ より，(2)のうち b が偶数である

$(b,\ c)=(4,\ 1),\ (6,\ 1),\ (6,\ 2),\ (6,\ 3),\ (6,\ 4)$

の 5 通りが条件を満たす.

$a=3$ のとき　(2)の $(b,\ c)=(4,\ 1),\ (5,\ 1),\ (5,\ 2),\ (6,\ 1),\ (6,\ 2)$ のうち

$\alpha^2+\beta^2=\dfrac{b^2-6c}{9}$ が整数となるものはない.

$a=4$ のとき　(2)の $(b,\ c)=(5,\ 1),\ (6,\ 1),\ (6,\ 2)$ のうち

$\alpha^2+\beta^2=\dfrac{b^2-8c}{16}$ が整数となるものはない.

$a=5$ のとき　(2)の $(b,\ c)=(5,\ 1),\ (6,\ 1)$ のうち

$\alpha^2+\beta^2=\dfrac{b^2-10c}{25}$ が整数となるものはない.

$a=6$ のとき　(2)の $(b,\ c)=(5,\ 1),\ (6,\ 1)$ のうち

$\alpha^2+\beta^2=\dfrac{b^2-12c}{36}$ が整数となるものはない.

よって，求める確率は $\dfrac{17+5}{6^3}=\dfrac{11}{108}$

2 (1)　9 枚のカードのうち，書かれた整数を 3 で割ったときの余りが

0 となるのは 0，3，6，9 が書かれた 4 枚

1 となるのは 1，4，7 が書かれた 3 枚

2 となるのは 2，5，8 が書かれた 3 枚

である．また，書かれた整数の和が 3 の倍数になるのは，それぞれの整数を 3 で割ったときの余りの和が 3 の倍数のときであり，その余りの組は

$(0,\ 0,\ 0),\ (0,\ 1,\ 2),\ (1,\ 1,\ 1),\ (2,\ 2,\ 2)$

に限られる．このそれぞれについて，カードの組合せの総数は

$(0,\ 0,\ 0)$ のとき ${}_4C_3=4$　　$(0,\ 1,\ 2)$ のとき ${}_4C_1\times{}_3C_1\times{}_3C_1=36$

$(1,\ 1,\ 1)$ のとき ${}_3C_3=1$　　$(2,\ 2,\ 2)$ のとき ${}_3C_3=1$

以上より，求める組合せの総数は $4+36+1+1=42$

(2)　10 枚のカードのうち，書かれた整数が偶数，奇数のものは，ともに 5 枚.

選んだカードに書かれた整数の和が偶数となるのは以下のとき.

・偶数 4 枚のとき　　組合せの総数は ${}_5C_4=5$

・偶数 2 枚，奇数 2 枚のとき　　組合せの総数は ${}_5C_2\times{}_5C_2=100$

・奇数 4 枚のとき　　組合せの総数は ${}_5C_4=5$

以上より，求める確率は $\dfrac{5+100+5}{{}_{10}C_4}=\dfrac{110}{210}=\dfrac{11}{21}$

(3)　選んだカードに書かれた整数の和が 9 以下となるのは以下のとき.

・1 回目に 0 が出るとき　　その確率は $\dfrac{1}{10}$

・2回目に0が出るとき

1回目に1〜9のカードが出るときで，その確率は $\dfrac{9}{10}\times\dfrac{1}{9}=\dfrac{1}{10}$

・3回目に0が出るとき

1回目と2回目の整数の和が9以下となるときで，2数の組合せは

(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7), (1, 8), (2, 3),
(2, 4), (2, 5), (2, 6), (2, 7), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 5) の16通り．

よって，その確率は $\dfrac{16\times 2!}{{}_{10}\mathrm{P}_2}\times\dfrac{1}{8}=\dfrac{2}{45}$

・4回目に0が出るとき

1回目から3回目の整数の和が9以下になるときで，3数の組合せは

(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5), (1, 2, 6), (1, 3, 4), (1, 3, 5), (2, 3, 4)
の7通り．

よって，その確率は $\dfrac{7\times 3!}{{}_{10}\mathrm{P}_3}\times\dfrac{1}{7}=\dfrac{1}{120}$

$1+2+3+4=10>9$ より，5回目以降に0が出る場合で整数の和が9以下になることはない．

以上より，求める確率は

$$1-\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{2}{45}+\frac{1}{120}\right)=\frac{269}{360}$$

3　1枚の硬貨を投げて表，裏が出る確率はともに $\dfrac{1}{2}$ である．

(1)　5回投げたあとにさいころが $R_{(3,\ 4)}$ の位置にあるのは，表が2回，裏が3回出るとき．

よって，求める確率は ${}_5\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{5}{16}$

(2)　2回投げたあとに6の目が上にあるのは，$R_{(3,\ 1)}$ または $R_{(1,\ 3)}$ にいるときで，その確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2\times 2$$

$R_{(3,\ 1)}$ から $R_{(3,\ 4)}$ に移動するのは，裏が3回出るときで，その確率は $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$

$R_{(1,\ 3)}$ から $R_{(3,\ 4)}$ に移動するのは，表が2回，裏が1回出るときで，その確率は

$${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}$$

よって，求める条件付き確率は

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^2\times{}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2\times 2}=\frac{1}{4}$$

(3)　硬貨を 5 回投げたあとにさいころの 1 の目が上にあるためには，硬貨を 2 回または 3 回投げたあとにさいころの 6 の目が上になければならない．

硬貨を 5 回投げるという試行を，2 回投げたあとに 3 回投げるという試行と，3 回投げたあとに 2 回投げるという試行に分けて考える．

硬貨を 2 回投げて表，表または裏，裏と出る事象を事象 A，硬貨を 3 回投げて表，裏，表，または裏，表，裏と出る事象を事象 B とすると，1 が上の状態で事象 A または事象 B が起こると 6 が上になり，6 が上の状態で事象 A または事象 B が起こると 1 が上になる．

硬貨を 5 回投げたあとにさいころの 1 の目が上にあるのは，事象 A が起こったあとに事象 B が起こる，または事象 B が起こったあとに事象 A が起こる場合である．

事象 A，事象 B が起こる確率はそれぞれ $\left(\frac{1}{2}\right)^2\times 2=\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\times 2=\frac{1}{4}$ より，

求める確率は $\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

第2講　微分・積分

1 (1)　$\mathrm{OP}=1$，$\angle\mathrm{AOP}=\theta$ より，点Pの座標は $(1\cdot\cos\theta,\ 1\cdot\sin\theta)$　つまり

$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$

$\mathrm{BQ}=1$，$\angle\mathrm{DBQ}=2\theta$ より，点Qの座標は $(-1+1\cdot\cos(\pi-2\theta),\ 1\cdot\sin(\pi-2\theta))$

つまり $\mathrm{Q}(-1-\cos2\theta,\ \sin2\theta)$

(2)　$\mathrm{PQ}^2=(-1-\cos2\theta-\cos\theta)^2+(\sin2\theta-\sin\theta)^2$

$=(-2\cos^2\theta-\cos\theta)^2+(2\sin\theta\cos\theta-\sin\theta)^2$

$=(-\cos\theta)^2(2\cos\theta+1)^2+\sin^2\theta(2\cos\theta-1)^2$

$=\cos^2\theta(2\cos\theta+1)^2+(1-\cos^2\theta)(2\cos\theta-1)^2$

$t=\cos\theta$ とすると

$\mathrm{PQ}^2=t^2(2t+1)^2+(1-t^2)(2t-1)^2$

$=t^2\{(2t+1)^2-(2t-1)^2\}+(2t-1)^2=t^2\cdot8t+4t^2-4t+1=8t^3+4t^2-4t+1$

(3)　$0\leqq\theta\leqq\pi$ より $-1\leqq\cos\theta\leqq1$ つまり $-1\leqq t\leqq1$

$f(t)=8t^3+4t^2-4t+1$ とおくと，$f'(t)=24t^2+8t-4=4(6t^2+2t-1)$

$6t^2+2t-1=0$ とすると $t=\dfrac{-1\pm\sqrt{7}}{6}$

よって，$f(t)$ の増減表は下図.

t	-1	$\cdots$	$\frac{-1-\sqrt{7}}{6}$	$\cdots$	$\frac{-1+\sqrt{7}}{6}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$	1	↗		↘		↗	

ここで，$f(t)=(6t^2+2t-1)\left(\dfrac{4}{3}t+\dfrac{2}{9}\right)-\dfrac{28}{9}t+\dfrac{11}{9}$ より

$$f\left(\frac{-1+\sqrt{7}}{6}\right)=-\frac{28}{9}\cdot\frac{-1+\sqrt{7}}{6}+\frac{11}{9}=\frac{47-14\sqrt{7}}{27}<1$$

よって，$t=\dfrac{-1+\sqrt{7}}{6}$ のとき PQ^2 は最小値 $\dfrac{47-14\sqrt{7}}{27}$ をとる.

2 (1)　点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ を通り，傾きが t の直線 l の方程式は

$y=t(x-p)+q$　つまり $y=tx-pt+q$

$q>p^2$ より放物線 $C_1: y=x^2$ と直線 l は異なる2点で交わり，その2つの交点の x 座標は，x の2次方程式

$x^2=tx-pt+q$　つまり $x^2-tx+pt-q=0$ の2解.

この2解を x_1，x_2 $(x_1<x_2)$ とすると，解と係数の関係より

$x_1+x_2=t$

よって，2つの交点を結ぶ線分の中点の x 座標は $\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{t}{2}$

またこの中点において，放物線 $C_2: y=-x^2+ax+b$ と直線 l が接するので，

x の２次方程式 $-x^2+ax+b=tx-pt+q$ つまり $x^2+(t-a)x+(-pt+q-b)=0$

が $x=\dfrac{t}{2}$ を重解にもつ.

したがって，等式 $x^2+(t-a)x+(-pt+q-b)=\left(x-\dfrac{t}{2}\right)^2$ が成立する.

x の係数および定数項を比較して，$t-a=-t$，$-pt+q-b=\dfrac{t^2}{4}$

したがって，$a=2t$，$b=-\dfrac{t^2}{4}-pt+q$

(2)　C_1 と C_2 の２つの交点の x 座標を α，β $(\alpha<\beta)$ とすると，α，β は x の２次方程式

$x^2=-x^2+ax+b$　つまり $2x^2-ax-b=0$ の２解.

よって，解と係数の関係および(1)の結果より

$$\alpha+\beta=\frac{a}{2}=t,\ \alpha\beta=-\frac{b}{2}=\frac{t^2}{8}+\frac{pt}{2}-\frac{q}{2}$$

$$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=t^2-\left(\frac{t^2}{2}+2pt-2q\right)=\frac{t^2}{2}-2pt+2q$$

よって，C_1 と C_2 で囲まれた領域の面積を S とすると

$$S=\int_\alpha^\beta\{(-x^2+ax+b)-x^2\}dx=\int_\alpha^\beta(-2x^2+ax+b)dx$$

$$=-2\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=-2\cdot\left\{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right\}=\frac{1}{3}\{(\beta-\alpha)^2\}^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}\left(\frac{t^2}{2}-2pt+2q\right)^{\frac{3}{2}}$$

(3)　$\dfrac{t^2}{2}-2pt+2q=\dfrac{1}{2}(t-2p)^2-2p^2+2q$ より，t が実数全体を動くとき，S は最小値

$\dfrac{1}{3}(-2p^2+2q)^{\frac{3}{2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}(q-p^2)^{\frac{3}{2}}$ をとる.

3 (1)　C_1 と C_2 の共有点の x 座標は，x の方程式

$x^3+px^2+x=x^2$　つまり $x\{x^2+(p-1)x+1\}=0$ の解.

共有点のうち，$x>0$ にあるものは x の２次方程式 $x^2+(p-1)x+1=0$ の２解.

この２解を α，β とすると，$\alpha>0$ かつ $\beta>0$ となるのは，

判別式 $D>0$ かつ $\alpha+\beta>0$ かつ $\alpha\beta>0$ のとき

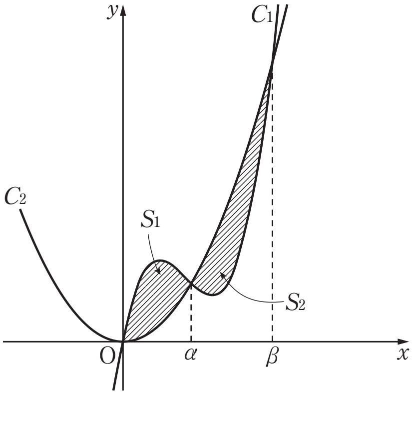
$D>0$ より $(p-1)^2-4>0$　　$(p+1)(p-3)>0$　　よって $p<-1$，$3<p$

解と係数の関係より

$\alpha+\beta=1-p>0$　よって $p<1$　　$\alpha\beta=1>0$

よって，求める p の値の範囲は $p<-1$

(2)　C_1，C_2 のグラフの概形は右図.



$f(x)=x^3+px^2+x$，$g(x)=x^2$ とすると，

$S_1=S_2$ より

$$\int_0^\alpha\{f(x)-g(x)\}dx=\int_\alpha^\beta\{g(x)-f(x)\}dx$$

$$\int_0^{\alpha}\{f(x)-g(x)\}\,dx+\int_{\alpha}^{\beta}\{f(x)-g(x)\}\,dx=0$$

$$\int_0^{\beta}\{f(x)-g(x)\}\,dx=0$$

よって(1)より

$$\int_0^{\beta}\{x^3+(p-1)x^2+x\}\,dx=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{p-1}{3}x^3+\frac{x^2}{2}\right]_0^{\beta}=\frac{\beta^4}{4}+\frac{p-1}{3}\beta^3+\frac{\beta^2}{2}=0$$

$\beta>0$ より $\dfrac{\beta^2}{4}+\dfrac{p-1}{3}\beta+\dfrac{1}{2}=0$

また β は $x^2+(p-1)x+1=0$ の解より，$\beta^2+(p-1)\beta+1=0$　つまり

$(p-1)\beta=-\beta^2-1$

よって $\dfrac{\beta^2}{4}+\dfrac{-\beta^2-1}{3}+\dfrac{1}{2}=0$　　$\beta^2=2$　　ゆえに $\beta=\sqrt{2}\,(>0)$

このとき $\sqrt{2}\,(p-1)=-3$ より，求める p の値は $p=1-\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{2-3\sqrt{2}}{2}$

また，$\alpha\beta=1$ より $\alpha=\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

よって

$$S_1=\int_0^{\alpha}\{x^3+(p-1)x^2+x\}\,dx=\frac{\alpha^4}{4}+\frac{p-1}{3}\alpha^3+\frac{\alpha^2}{2}=\alpha^2\left(\frac{\alpha^2}{4}+\frac{p-1}{3}\alpha+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{16}$$

第３講　ベクトル

1 (1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}$ より

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CA}=\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{c}=0$，$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}=\vec{c}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{c}\cdot\vec{a}=0$

また，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{AB}$ はいずれも $\vec{0}$ ではない．したがって $OB\perp CA$，$OC\perp AB$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=k$ とおくと，$\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})$ より

$$|\overrightarrow{OD}|^2=\frac{1}{4}|\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}|^2=\frac{1}{4}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{b}\cdot\vec{c}-2\vec{c}\cdot\vec{a})$$

$$=\frac{1}{4}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-2k)$$

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}(-\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})=-\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{a}-\vec{b})$ より，

$$|\overrightarrow{AD}|^2=\frac{1}{4}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-2k)$$

$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}=-\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a})$ より，

$$|\overrightarrow{BD}|^2=\frac{1}{4}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-2k)$$

したがって，$|\overrightarrow{OD}|=|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{BD}|$ より，D は △OAB の外心である．

(3) (i) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle AOB=2\times3\times\frac{1}{3}=2$

よって $\vec{b}\cdot\vec{c}=2$ より $\vec{b}\cdot(x\vec{a}+y\vec{b})=2$　　$2x+9y=2$

$\vec{c}\cdot\vec{a}=2$ より $(x\vec{a}+y\vec{b})\cdot\vec{a}=2$　　$4x+2y=2$ つまり $2x+y=1$

したがって，$x=\frac{7}{16}$，$y=\frac{1}{8}$

(ii) 点 E は辺 AB を $t:(1-t)$ に内分する点より，

$\overrightarrow{OE}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$

$\overrightarrow{OC}=\frac{7}{16}\vec{a}+\frac{1}{8}\vec{b}$ であり，点 E は直線 OC 上の点より

$\overrightarrow{OE}=s\overrightarrow{OC}=\frac{7}{16}s\vec{a}+\frac{1}{8}s\vec{b}$ となる実数 s がある．

$\vec{a}$，$\vec{b}$ は１次独立より，$1-t=\frac{7}{16}s$，$t=\frac{s}{8}$　　よって　$s=\frac{16}{9}$，$t=\frac{2}{9}$

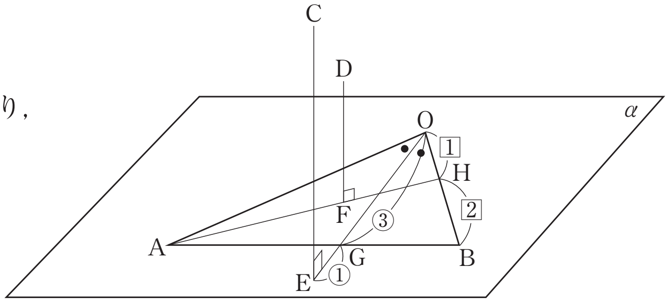
2 (1)　$\mathrm{OA}=\sqrt{3^2+0^2+4^2}=5$

$\mathrm{OB}=\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}=3$

OG は ∠AOB の二等分線より，

AG：GB＝OA：OB＝5：3

よって



$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{3}{8}\vec{a}+\dfrac{5}{8}\vec{b}$

$=\dfrac{3}{8}(3,\ 0,\ 4)+\dfrac{5}{8}(1,\ -2,\ 2)=\left(\dfrac{7}{4},\ -\dfrac{5}{4},\ \dfrac{11}{4}\right)$

したがって $\mathrm{G}\left(\dfrac{7}{4},\ -\dfrac{5}{4},\ \dfrac{11}{4}\right)$

(2)　求めるベクトルを $\vec{n}=(x,\ y,\ z)$ とおくと，

$\vec{n}\cdot\vec{a}=0$ より $3x+4z=0$　　よって $z=-\dfrac{3}{4}x$

$\vec{n}\cdot\vec{b}=0$ より $x-2y+2z=0$　　よって，$y=-\dfrac{1}{4}x$

したがって，$\vec{n}=\left(x,\ -\dfrac{1}{4}x,\ -\dfrac{3}{4}x\right)=x\left(1,\ -\dfrac{1}{4},\ -\dfrac{3}{4}\right)$

$|\vec{n}|=\sqrt{26}$ より $|x|\sqrt{1^2+\left(-\dfrac{1}{4}\right)^2+\left(-\dfrac{3}{4}\right)^2}=\sqrt{26}$　　$\dfrac{\sqrt{26}}{4}|x|=\sqrt{26}$

よって $x=\pm 4$

したがって求めるベクトルの 1 つは $4\left(1,\ -\dfrac{1}{4},\ -\dfrac{3}{4}\right)=(4,\ -1,\ -3)$

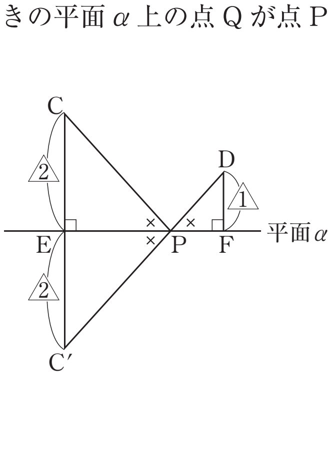
(3)　平面 α に関して点 C と対称な点を C′ とすると，平面上の任意の点 Q に関して

CQ＝C′Q

よって，CQ＋QD＝C′Q＋QD≧C′D

等号成立は，C′，Q，D が一直線上に並ぶときで，このときの平面 α 上の点 Q が点 P である．

右図より P は EF を 2：1 に内分する点であり，



$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OE}}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OF}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{3}{8}\vec{a}+\dfrac{5}{8}\vec{b}\right)=\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{5}{6}\vec{b}$

$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=k\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ $(k>0)$ より

$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\overrightarrow{\mathrm{OH}}$

$=(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\cdot\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(1-k)\vec{a}+\dfrac{k}{3}\vec{b}$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OE}}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{5}{6}\vec{b}\right)+\dfrac{2}{3}\left\{(1-k)\vec{a}+\dfrac{k}{3}\vec{b}\right\}$

$=\left(\dfrac{5}{6}-\dfrac{2}{3}k\right)\vec{a}+\left(\dfrac{5}{18}+\dfrac{2}{9}k\right)\vec{b}$

(4)　(3)より，点 P が △OAB の内部にあるための条件は

$$\frac{5}{6}-\frac{2}{3}k>0 \quad \text{かつ} \quad \frac{5}{18}+\frac{2}{9}k>0 \quad \text{かつ} \quad \left(\frac{5}{6}-\frac{2}{3}k\right)+\left(\frac{5}{18}+\frac{2}{9}k\right)<1$$

$$k<\frac{5}{4} \quad \text{かつ} \ k>-\frac{5}{4} \quad \text{かつ} \ k>\frac{1}{4} \qquad \text{したがって，} \frac{1}{4}<k<\frac{5}{4}$$

3　(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(1,\ 2,\ -3)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-2,\ 3,\ -1)$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=k\overrightarrow{\mathrm{AC}}$（$k$ は実数）と仮定すると，$1=-2k$，$2=3k$，$-3=-k$

これらをすべて満たす実数 k は存在しない．よって，3 点 A，B，C は同一直線上にない．

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp$(平面 α) となるのは $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$　かつ $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ のとき．

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})+\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$=s(1,\ -1,\ 2)+t(3,\ -1,\ -2)+(-1,\ 2,\ 1)$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ より $(1-2-6)s+(3-2+6)t+(-1+4-3)=0$　よって $-7s+7t=0$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ より $(-2-3-2)s+(-6-3+2)t+(2+6-1)=0$

よって $-7s-7t+7=0$

よって，$s=\frac{1}{2}$，$t=\frac{1}{2}$

このとき $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}(1,\ -1,\ 2)+\frac{1}{2}(3,\ -1,\ -2)+(-1,\ 2,\ 1)=(1,\ 1,\ 1)$ より

$\mathrm{P}_1(1,\ 1,\ 1)$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ より，点 P は，点 C を通り $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ が張る平面上にある．

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ が最小になるときの点 P に関して

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}=0$ が成り立つ．

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$ より $(1+1+4)s+(3+1-4)t+(-1-2+2)=0$　よって $s=\frac{1}{6}$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}=0$ より $(3+1-4)s+(9+1+4)t+(-3-2-2)=0$　よって $t=\frac{1}{2}$

このとき $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{6}(1,\ -1,\ 2)+\frac{1}{2}(3,\ -1,\ -2)+(-1,\ 2,\ 1)=\left(\frac{2}{3},\ \frac{4}{3},\ \frac{1}{3}\right)$

より $\mathrm{P}_2\left(\frac{2}{3},\ \frac{4}{3},\ \frac{1}{3}\right)$

(4)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}_2}=\left(\frac{2}{3},\ \frac{4}{3},\ \frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}(2,\ 4,\ 1)$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=l(2,\ 4,\ 1)$（$l$ は実数）と表される．

また，点 Q は平面 α（平面 ABC）上の点より，実数 m，n を用いて

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+m\overrightarrow{\mathrm{AB}}+n\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(1,\ -1,\ 2)+m(1,\ 2,\ -3)+n(-2,\ 3,\ -1)$

と表される．

よって，$2l=1+m-2n$，$4l=-1+2m+3n$，$l=2-3m-n$

これらより，$l=\frac{2}{7}$，$m=\frac{3}{7}$，$n=\frac{3}{7}$

したがって $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{2}{7}(2,\ 4,\ 1)=\left(\frac{4}{7},\ \frac{8}{7},\ \frac{2}{7}\right)$ より，$\mathrm{Q}\left(\frac{4}{7},\ \frac{8}{7},\ \frac{2}{7}\right)$

第４講　数列

1 (1) $3^1=3=5\times0+3$ より，$b_1=3$　　$3^2=9=5\times1+4$ より，$b_2=4$

$3^3=27=5\times5+2$ より，$b_3=2$　　$3^4=81=5\times16+1$ より $b_4=1$

また，$3^{n+4}-3^n=(3^4-1)\cdot3^n=80\cdot3^n=5\cdot16\cdot3^n$

これは5の倍数より，3^{n+4} と 3^n は5で割ったときの余りが一致する．

したがって，$b_{n+4}=b_n$

よって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{100}b_n=\sum_{k=1}^{25}(b_{4k-3}+b_{4k-2}+b_{4k-1}+b_{4k})$

$=(b_1+b_2+b_3+b_4)\times25=25(3+4+2+1)=250$

(2) $3^n=5a_n+b_n$ より $a_n=\dfrac{1}{5}(3^n-b_n)$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{100}a_n=\frac{1}{5}\left(\sum_{n=1}^{100}3^n-\sum_{n=1}^{100}b_n\right)=\frac{1}{5}\left\{\frac{3(3^{100}-1)}{3-1}-250\right\}=3\cdot\frac{3^{100}-1}{10}-50$

(2)より $3^{100}=5a_{100}+b_{100}$ であり，

(1)より $b_{100}=b_{96}=b_{92}=\cdots\cdots=b_4=1$ であることから，$3^{100}=5a_{100}+1$

よって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{100}a_n=3\cdot\frac{5a_{100}}{10}-50=3\left(\frac{a_{100}}{2}-17\right)+1$ …… ①

ここで，$5a_{100}=3^{100}-1$

3^{100} は奇数より，$3^{100}-1$ は偶数，すなわち2の倍数．

2と5は互いに素より，a_{100} は2の倍数である．

したがって，$\dfrac{a_{100}}{2}-17$ は整数であることから，①より $\displaystyle\sum_{n=1}^{100}a_n$ を3で割ったときの余りは1

2 (1) $S_n=\dfrac{1}{2}n\{2a-3(n-1)\}$ …… ①　とする．

［Ⅰ］ $n=1$ のとき

$S_1=a_1=a$ より①は成立

［Ⅱ］ $n=k$ のとき

①が成り立つと仮定すると $S_k=\dfrac{1}{2}k\{2a-3(k-1)\}$

$S_{k+1}=S_k+a_{k+1}$

$=\dfrac{1}{2}k\{2a-3(k-1)\}+(a-3k)$

$=\dfrac{2ak-3k(k-1)+2a-6k}{2}$

$=\dfrac{2a(k+1)-3k(k+1)}{2}=\dfrac{1}{2}(k+1)(2a-3k)$

よって，①は $n=k+1$ のときも成立する．

以上より，すべての自然数 n で①が成立することが示された．

(2) $T_n=\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)a_k$

$=\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)\{a-3(k-1)\}$

$=\sum_{k=1}^{n}\{n-(k-1)\}\{a-3(k-1)\}$

$=\sum_{k=1}^{n}\{na-(a+3n)(k-1)+3(k-1)^2\}$

$=na\cdot n-(a+3n)\cdot\frac{1}{2}n(n-1)+3\cdot\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)$

$=\frac{1}{2}n\{2na-(n-1)(a+n+1)\}$

$=\frac{1}{2}n\{2na-(n-1)a-(n-1)(n+1)\}$

$=\frac{1}{2}n\{a(n+1)-(n-1)(n+1)\}$

$=\frac{1}{2}n(n+1)(a-n+1)$

(3) $S_n<0$ より $\frac{1}{2}n\{2a-3(n-1)\}<0$　　$n>0$ より $n>\frac{2}{3}a+1$

$T_n\geqq 0$より $\frac{1}{2}n(n+1)(a-n+1)\geqq 0$　$n>0$ より $n\leqq a+1$

$a>0$より，$\frac{2}{3}a+1<n\leqq a+1$ …… ①

これを満たす自然数 n の個数が 30 となるのは，

$n=a-28$，…，a，$a+1$ が解となるときである．

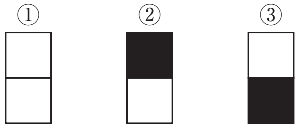
$a-29\leqq\frac{2}{3}a+1<a-28$

$87<a\leqq 90$

a は自然数より，$a=88$，89，90

3 (1) $n=1$ のときのタイルの敷きつめ方は，

右図①，②，③の 3 通り．

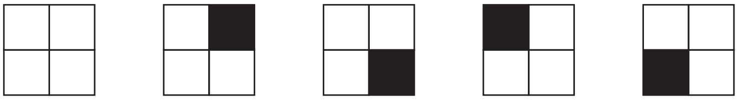


よって，$a_1=1$，$b_1=1$，$c_1=3$

$n=2$ のときのタイルの

敷きつめ方は，

右図の 5 通り．



よって，

$a_2=3$，$b_2=1$，$c_2=5$

(2) 横の長さが n の長方形において，左上が黒色で左下が白色になるときの場合の数と，左上が白色で左下が黒色であるときの場合の数は等しく，b_n 通りである．

⑴の①に，横の長さが n の長方形をつけて横の長さが $n+1$ の長方形を作ると考えると，

$a_{n+1}=a_n+2b_n$

⑴の②に，横の長さが n の長方形のうち左上と左下がともに白色のものをつけて横の長さが $n+1$ の長方形を作ると考えると，

$b_{n+1}=a_n$

⑶　⑵より $a_{n+2}=a_{n+1}+2b_{n+1}$　よって $a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n$ …… ④

④より $a_{n+2}+a_{n+1}=2(a_{n+1}+a_n)$

よって，数列 $\{a_{n+1}+a_n\}$ は，初項 $a_2+a_1=4$，公比 2 の等比数列より

$a_{n+1}+a_n=4\cdot 2^{n-1}=2^{n+1}$ …… ⑤

また④より $a_{n+2}-2a_{n+1}=-(a_{n+1}-2a_n)$

よって，数列 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ は，初項 $a_2-2a_1=1$，公比 -1 の等比数列より

$a_{n+1}-2a_n=1\cdot(-1)^{n-1}=(-1)^{n-1}$ …… ⑥

⑷　⑤，⑥を辺々引いて

$3a_n=2^{n+1}-(-1)^{n-1}$

$a_n=\dfrac{2^{n+1}-(-1)^{n-1}}{3}$

よって，$c_n=a_n+2b_n=a_{n+1}=\dfrac{2^{n+2}-(-1)^n}{3}$

Ⓒ RECRUIT
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。